

# 目次

## ふたたびの確率・統計 [2] 統計編

はじめに ～続編のための「ふたたびの」まえがき～	3
統計分野における各記号の意味（一覧）	4

## 第3章 記述統計 (Descriptive Statistics) 15

### 00 統計とは？ ～統計なくして国家なし～ 16

統計リテラシー ～明暗を分けたもの～	17
統計の歴史① ～起源は「国勢調査」～	19
統計の歴史② ～「記述統計」の誕生～	20
「戦死」の実態を「見える化」 ～ナイチンゲールの貢献～	21
統計の歴史③ ～「推測統計」への発展～	23
推測統計の二本柱 ～「推定」と「検定」～	25
統計を学ぶ目的 ～情報から物語を紡ぐ～	25

コラム 1 「統計」という言葉について	33
どう訳すべきか ～明治人の奮闘～	33
新たな漢字を当ててまでして	34

### 01 データの整理 ～そのルールや作法を学ぶ～ 36

国（地域）別インターネット利用率で考える	36
度数分布表とは？ ～データの散らばり具合を知る～	39
《度数分布表を見るとききの注意点》	40
■補足■ 階級の幅の決め方	40
●階級の幅の決め方、その① ～JIS規格～	41
●階級の幅の決め方、その② ～スタージェスの公式～	43
ヒストグラムとは？ ～散らばり具合に見える化～	44
まとめ ヒストグラム作成時の注意点	44
相対度数と累積相対度数 ～全体に占める割合は？～	46

コラム 2 大きな数の“チョーすごい”話	49
宝くじの1等が当たる確率を“見える化”すると	50
大きな数に対する感覚を磨く	50

## 02 データの代表値 ～それぞれの考え方と求め方～ ..... 52

代表値その①【平均値】	～ $\bar{x}$ で表す～	52
<b>定義</b>	平均	54
<b>例 1</b>	A組とB組の点数から	54
<b>例題 1</b>	平均から言えること○× (2011年 日本数学会)	57
「仮平均」という手法	～省エネ計算のヒント～	58
<b>補足 1</b>	いろいろな平均	61
(i)	算術平均 (相加平均、arithmetic mean)	61
(ii)	幾何平均 (相乗平均、geometric mean)	62
《幾何平均の使いみち》		62
(iii)	調和平均 (harmonic mean)	64
《調和平均の使いみち》		65
《ところで、なぜ「調和」なのか》		67
<b>補足 2</b>	「相加平均 $\geq$ 相乗平均 $\geq$ 調和平均」を証明する	68
(ア)	$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (相加平均 $\geq$ 相乗平均) の証明	69
《図形を使った証明》		69
《数式による証明》		70
(イ)	$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (相乗平均 $\geq$ 調和平均) の証明	70
《3種類の平均を直観的に理解》		72
《「1株あたりの購入金額」が安くなるのはどっち?》		74
代表値その②【中央値】	～メジアンとも言う～	77
<b>手順</b>	中央値の求め方	77
<b>例 2</b>	ふたたび、A組とB組の点数から	78
《外れ値にご注意!》		80
代表値その③【最頻値】	～モードとも言う～	81
<b>例 3</b>	みたび、A組とB組の点数から	82
<b>例題 2</b>	ある会社の通勤時間	83
3つの代表値とデータの分布		84
<b>補足 3</b>	$n$ 乗根 (累乗根)	86
<b>まとめ</b>	平方根の性質	88
コラム 3	「平均人」の誕生と幻想	89
意外な結果	～世界は“個性”であふれていた～	89
一世を風靡したケトラー学説		90
あくまでも基準のひとつ		93

## 03 データの散らばりと四分位数 ～4分割で見る～ 94

両リーグのチーム別本塁打数で考える	94
最小値と最大値、そして範囲	97
<b>定義</b> 範囲	97
四分位数とは？ ～4等分する3つの値 $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ ～	98
<b>定義</b> 第1、第2、第3四分位数の定義	99
<b>例</b> 7個から10個で考える	100
<b>定義</b> 四分位範囲と四分位偏差	107
<b>例題 3</b> A社とB社の年収	109
箱ひげ図とは？ ～ばらつき具合がよく見える～	111
<b>例題 4</b> テストAとテストB (2015年 つくば国際大学)	114
<b>余談</b> 箱ひげ図を発明した人	116
箱ひげ図とヒストグラムの関係	117
<b>例題 5</b> 箱ひげ図とヒストグラムの対応 (2016年 センター試験)	122
<b>コラム 4</b> EXCEL で箱ひげ図を書こう	124
<b>補足</b> 四分位数の計算方法について	128
包括的四分位数 ～中央値を重ねて含める～	130
排他的四分位数 ～中央値をとみに含めず～	132

## 04 分散と標準偏差 ～平均からのばらつき具合～ 136

<b>例 5</b> 5店舗比較	136
偏差とは？ ～平均からの差～	137
分散とは？ ～偏差の2乗の平均～	139
<b>手順</b> 分散の求め方	140
<b>定義</b> 分散	141
<b>例 6</b> ふたたび、本塁打数で考える	141
分散の計算公式を導く	144
<b>公式</b> 分散の計算公式	144
<b>例 7</b> ふたたび、5店舗比較	146
<b>例題 6</b> 20個のうちの10個 (2018年 成蹊大学)	147
標準偏差とは？ ～分散の平方根～	150
<b>定義</b> 標準偏差	151
<b>例 8</b> みたび、本塁打数で考える	152
<b>例題 7</b> 大小さまざまな正方形	152
偏差値とは？ ～真ん中が50のモノサシ～	154
<b>定義</b> 偏差値	155

<b>例 9</b> 実際のセンター試験を例に考える	155
<b>コラム 5</b> 今度こそ $\Sigma$ (シグマ記号) を攻略しよう!	158
$\Sigma$ の意味	158
$\Sigma$ の計算公式	160
自然数の和の $\Sigma$ を図解する	160
平方数の和の $\Sigma$ を図解する	163
立方数の和の $\Sigma$ を図解する	166
$\Sigma$ の性質 ～なぜ $\Sigma$ 記号は便利なのか?～	169
<b>例 10</b> 分配法則のような $\Sigma$ の計算例	170
$\Sigma$ の計算公式の証明	171
統計量を $\Sigma$ で書こう	175

## 05 データの相関 ～図の印象と数値で分析～ 176

<b>散布図とは?</b> ～座標平面上にプロットする～	176
<b>例 11</b> ある私鉄沿線の家賃	182
<b>共分散の意味と相関係数の求め方</b>	183
<b>定義</b> 共分散	188
<b>定義</b> 相関係数	190
<b>相関係数の解釈</b> ～真ん中が 0 のモノサシ～	192
<b>まとめ</b> 相関係数 $r$ の性質	194
<b>例題 8</b> 相関関係はあるか	197
<b>相関関係についての注意点</b>	199
<b>まとめ</b> 相関関係について注意すべきこと	202
<b>相関係数の理論的背景</b>	202
【 $-1 \leq r \leq 1$ の証明のための準備①: 絶対値】	203
<b>例 12</b> 絶対値の入った方程式を解く	205
<b>例 13</b> 絶対値の入った不等式を解く	206
<b>まとめ</b> 絶対値の性質	208
【 $-1 \leq r \leq 1$ の証明のための準備②: 三角不等式】	208
<b>まとめ</b> 三角不等式	212
【 $-1 \leq r \leq 1$ の証明のための準備③: コーシー・シュワルツの不等式】	213
【 $-1 \leq r \leq 1$ の証明】	219
【相関係数が最大値や最小値をとるとき】	222
点 $(p, q)$ を通る傾き $a$ の直線の方程式	223
<b>コラム 6</b> EXCEL で相関関係を調べよう	225
散布図の書き方	227
相関係数の出し方	228

## 第4章 推測統計 (Inferential Statistics) ..... 231

### 01 確率変数と確率分布 ～まずは概念を導入～ ..... 232

**確率変数とは?** ～覆面レスラーでたとえると～ ..... 233

≡例 1≡ 1枚のコインを2回 ..... 237

**確率分布とは?** ～確率変数は分布に従う～ ..... 237

**定義** 確率変数と確率分布 ..... 240

**例題 1** サイコロを2回 ..... 241

**確率変数の期待値** ～平均的に期待される値～ ..... 243

**定義** 確率変数  $X$  の期待値 (または平均) ..... 245

≡例 2≡ ある宝くじの各等の当たりやすさ ..... 246

**例題 2** 損をしない賞金額設定 ..... 248

**確率変数の分散と標準偏差** ～ $V(X)$ と $\sigma(X)$ ～ ..... 249

**定義** 確率変数の分散と標準偏差 ..... 252

**公式** 確率変数の分散の計算公式 ..... 254

**証明** 定義から公式を導く ..... 254

**例題 3** 1, 2, 2, 3, 3, 3 ..... 256

**確率変数の変換** ～ $a$ 倍して $b$ を加える～ ..... 258

**公式**  $Y = aX + b$  の期待値 ..... 260

≡例 3≡ スペシャルタイムのある福引 ..... 260

**$Y = aX + b$  の分散と標準偏差** ～定数 $b$ はどこへ?～ ..... 262

**公式**  $Y = aX + b$  の分散と標準偏差 ..... 264

≡例 4≡ ふたたびスペシャルタイムのある福引 ..... 265

**例題 4** ある確率変数 ..... 268

### コラム 7 パスカルとフェルマーの往復書簡 ..... 270

起こった過去か、起こりうる未来か ..... 271

未来の可能性をくまなく見る ..... 272

未来予測を定量化する画期的な試み ..... 274

聖俗二様の人生を天秤にかけたパスカル ..... 275

## 02 確率変数の和と積 ～数式と記号の意味を知る～ ..... 278

確率変数の和の期待値 ～こちらは無条件で成立～	279
<b>公式</b> 確率変数の和の期待値 (平均)	288
<b>例 5</b> 3種のコインで考える	289
確率変数の積の期待値 ～こちらは条件つきで成立～	290
<b>公式</b> 確率変数の独立	292
<b>例 6</b> 2種のコインで考える	293
<b>公式</b> 確率変数の積の期待値 (平均)	297
<b>例題 5</b> $X$ と $X^2$	299
独立な確率変数の和の分散 ～公式総動員で導く公式～	302
<b>公式</b> 独立な確率変数の和の分散	304
<b>例題 6</b> $\square$ が出たらラッキー	305
<b>コラム 8</b> なぜ、こんなにも数式にこだわるのか	310
数学の美しさとは？	311
数学という「言葉」の声を聞けるように	313

## 03 二項分布と正規分布 ～推測統計の屋台骨～ ..... 314

グラフが語る、大相撲八百長疑惑	314
二項分布とは？ ～ $B(n, p)$ で表す～	315
二項分布の期待値 (あるいは平均) と分散	323
<b>公式</b> 二項分布に従う確率変数の期待値と分散	327
<b>例 7</b> 公式に慣れよう	327
<b>例題 7</b> 3色の玉が100個 (1998年 鹿児島大学)	328
<b>発展</b> ポアソン分布 ～めったに起こらないものの確率～	330
<b>公式</b> ポアソン分布	334
《ポアソン分布の応用》	338
<b>例 8</b> 「10年に1人の逸材」が2人も	341
<b>補足 1</b> 二項分布からポアソン分布を導く	341
<b>補足 2</b> 自然対数の底 (あるいはネイピア数) $e$	344
<b>定義</b> 自然対数の底 (ネイピア数) $e$	344
連続型確率変数とその分布 ～名演奏で考える～	347
確率密度関数 ～ここで積分が登場～	356
<b>例 9</b> 積分のおさらい	357
<b>まとめ</b> 確率密度関数の性質	359
<b>例 10</b> 積分でおさらい	362

<b>連続型確率変数の期待値と分散・標準偏差</b> .....	363
<b>定義</b> 連続型確率変数の期待値と分散・標準偏差 .....	363
<b>補足 3</b> 積分および積分記号の意味 .....	368
<b>例題 8</b> 定数関数の場合 .....	370
<b>正規分布とは？ ～その 8 つの特徴とは～</b> .....	372
<b>まとめ</b> 正規分布曲線の 8 つの特徴 .....	373
<b>公式</b> 正規分布の期待値と分散・標準偏差 .....	375
<b>例 11</b> 公式に慣れよう .....	375
<b>パン屋のズルを見抜いたポアンカレ</b> .....	376
<b>正規分布の応用範囲の広さと重要性</b> .....	379
<b>まとめ</b> 正規分布の重要性 .....	380
<b>標準正規分布 ～他のすべてを測れるモノサシ～</b> .....	380
<b>定理</b> 正規分布の変数変換 .....	380
<b>まとめ</b> 標準正規分布への変換 .....	383
<b>正規分布表の使い方 ～先人たちの労力に感謝～</b> .....	385
<b>例 12</b> 標準正規分布の計算練習 .....	387
<b>例題 9</b> 正規分布表を使って解く .....	389
<b>正規分布表の応用 ～ふたたび積分が登場～</b> .....	392
<b>例 13</b> ある工場の不良品 .....	392
<b>例題 10</b> ある企業の入社試験 .....	395
<b>二項分布の正規分布による近似</b> .....	398
<b>定理</b> 二項分布の正規分布による近似 .....	402
<b>例 14</b> コインを 400 回投げる .....	402
<b>補足 4</b> ガウス積分 .....	407
<b>補足 5</b> 連続型確率変数の変数変換 .....	411
<b>コラム 9 正規分布の歴史</b> .....	414
正規分布の“発見者”ド・モアブル .....	414
誤差のあるところ、正規分布あり .....	414
誤差にもルールがあると考えたガウス .....	416
正規分布至上主義の時代へ .....	418

## 04 推測統計 ～サンプルと母集団のズレを考察～ ..... 420

全数調査と標本調査 ～オール or サンプル～ .....	420
無作為抽出と乱数 ～ランダムは至難のワザである～ .....	423
≡例 16≡ 乱数表を用いて 50 個から 10 個を無作為抽出する .....	427
母集団と標本 ～両者に密なる関係があればこそ～ .....	428
標本の平均・分散・期待値 ～センター試験を例に～ .....	433
標本平均の期待値・分散・標準偏差 ～期待どおりの関係～ .....	436
<b>公式</b> 標本平均の期待値と分散と標準偏差 .....	440
≡例 16≡ ある県の 20 歳男子 .....	442
<b>例題 11</b> 血液型が A 型 .....	443
大数の法則 ～昭和生まれのコインで考える～ .....	445
<b>定理</b> 大数の法則 .....	450
中心極限定理 ～引き続き、昭和生まれのコインで考える～ .....	451
<b>定理</b> 中心極限定理 .....	451
≡例 17≡ ふたたび昭和生まれのコインで考える .....	458
点推定 ～母集団をピンポイントで推定する～ .....	461
<b>まとめ</b> 推定量がもつべき性質 .....	463
<b>定義</b> 不偏分散 .....	466
≡例 18≡ サイコロ 5 回 .....	468
区間推定 ～母集団を幅をもたせて推定する～ .....	470
≡例 19≡ 20 歳男子の身長で考える .....	473
<b>定理</b> 母平均 $m$ の 95 % 信頼区間 .....	475
自由度について ～駆け足の前の準備～ .....	477
t 分布について ～さらっと駆け足で～ .....	479
t 分布のグラフ ～自由度によって変形する～ .....	482
<b>定理</b> t 分布と t 統計量 .....	483
t 分布表 ～正規分布表とは見方が違う～ .....	484
母分散が未知のとき、母平均を推定する (標本の大きさが小さいとき) .....	488
<b>定理</b> 母平均 $m$ の 95 % 信頼区間 (母分散が未知のとき) .....	489
≡例 20≡ 平成最後の 1 週間の最高気温 .....	490
母分散が未知のとき、母平均を推定する (大標本のとき) .....	492
<b>定理</b> 母平均 $m$ の 95 % 信頼区間 (母分散が未知 & 大標本) .....	493
≡例 21≡ ワインの消費量で考える .....	494
母比率の推定 .....	495
<b>定理</b> 母比率 $p$ の 95 % 信頼区間 .....	497
≡例 22≡ 視聴率で考える .....	499



<b>例題 12</b> 抽出すべきは何人以上？ .....	500
<b>補足</b> 大数の法則の証明（チェビシェフの不等式） .....	502
<b>定理</b> チェビシェフの不等式 .....	502
<b>仮説検定</b> ～ダイエットサポート飲料の効果で考える～ .....	507
<b>仮説検定の過誤について</b> ～2種類の判定ミス～ .....	518
《母平均の検定》 .....	519
<b>例 23</b> 精米工場の袋詰め機 .....	519
《母比率の検定》 .....	523
<b>例 24</b> 注文が多いのは赤か白か .....	523
<b>コラム 10</b> 仮説検定の誤用と p 値至上主義への警告 .....	526
統計は諸刃の剣 .....	529
あとながき .....	530
さくいん .....	534